DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Šibenik, 2.travnja-4.travnja 2014.

5. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Nakon što Maja načini $10 + 3 + 10 + 2 + 10 + 1 = 36$ koraka, pomakne se

$10 - 3 + 10 - 2 + 10 - 1 = 24$ koraka od kuće.

Kako je $2014 = 83 \cdot 24 + 22$, da bi se pomakla 2014 koraka od kuće, mora 83 puta ponoviti

postupak i još se pomaknuti 22 koraka od kuće.

Preostalih 22 koraka će se odmaknuti tako da učini 10 koraka naprijed, 3 natrag, 10 naprijed,

2 natrag i 7 naprijed.

Tako je Maja načinila $83 \cdot 36 + 10 + 3 + 10 + 2 + 7 = 3020$ koraka.

2. Izračunajmo koliko ima znamenaka u nizu.

Za 9 jednoznamenkastih brojeva koristili smo 9 znamenaka, za 90 dvoznamenkastih brojeva 180 znamenaka, za 900 troznamenkastih brojeva 2700 znamenaka i za 1015 četveroznamenkastih brojeva 4060 znamenaka.

U nizu ima ukupno 6949 znamenaka.

Kako je $6949 = 3474 \cdot 2 + 1$, tražimo 3475. znamenku.

Za jednoznamenkaste, dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve koristili smo 2889 znamenaka.

Za četveroznamenkaste brojeve nam preostaje $3475 - 2889 = 586$ znamenaka.

Kako je $586 = 146 \cdot 4 + 2$, tražena znamenka je 2. znamenka u 147. četveroznamenkastom broju.

To je broj 1146, a tražena znamenka je 1.

3. Vrijedi $\overline{ab} \cdot \overline{cc} \cdot \overline{abc} = \overline{abcabc}$

$$\overline{ab} \cdot \overline{cc} \cdot \overline{abc} = \overline{abc000} + \overline{abc}$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{cc} \cdot \overline{abc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc}$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{cc} \cdot \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}\,.$$

Dijeljenjem jednakosti s $\overline{abc}$, dobije se $\overline{ab} \cdot \overline{cc} = 1001$

$$\overline{ab} \cdot \overline{cc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 .$$

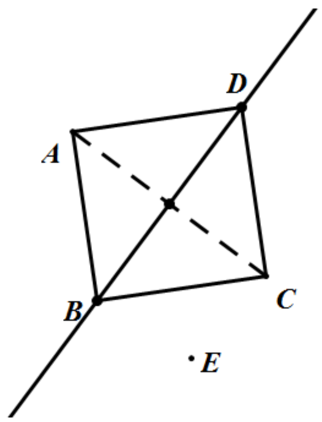
Na kraju, $\overline{ab} \cdot \overline{cc} = 13 \cdot 77$ ili $\overline{ab} \cdot \overline{cc} = 91 \cdot 11$.

Dakle, $\overline{abc} = 137$ ili $\overline{abc} = 911$.

4. Vrhovi A i C nesusjedni su vrhovi kvadrata te je dužina $\overline{AC}$ njegova dijagonala.

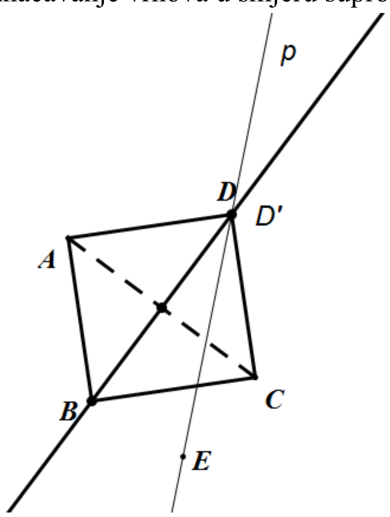
Dijagonale kvadrata sijeku se pod pravim kutom pa se preostali vrhovi kvadrata nalaze na simetrali dužine $\overline{AC}$.

Dijagonale kvadrata raspolavljaju se u polovištu dužine $\overline{AC}$ što nam daje položaj preostalih vrhova kvadrata.

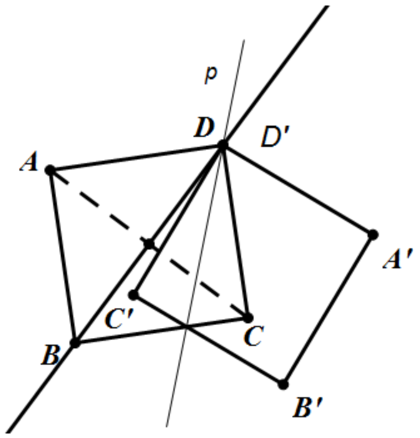


Budući da je pravac p os simetrije, a točka D' pripada osi simetrije, tada se točke D i D' preklapaju.

Dakle, os simetrije je pravac p koji prolazi točkama D i E. (Pri tome treba voditi računa na označavanje vrhova u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.)



Nacrtamo i označimo osnosimetrične slike točaka A, B i C s obzirom na pravac DE .



5. Automobil za 1 sat (60 minuta) prijeđe 12 · (60 : 10) = 72 km.

   Automobil za 30 minuta prijeđe 36 km.

   Automobil za 2 sata i 30 minuta prijeđe 2 · 72 + 36 = 144 + 36 = 180 km.

   Kamion za 1 sat prijeđe 10 · (60 : 12) = 50 km.

   Kamion za 30 minuta prijeđe 25 km.

   Kamion za 2 sata i 30 minuta prijeđe 2 · 50 + 25 = 125 km.

   S obzirom da je 180 + 125 = 305 > 300, automobil i kamion će se putem sresti i nastaviti dalje put prema odredištu.

   Njihova udaljenost nakon 2 sata i 30 minuta bit će 180 + 125 – 300 = 5 km.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Šibenik, 2.travnja-4.travnja 2014.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj kuglica u kutiji C prije premještanja.

Tada vrijedi $x+\frac{1}{5}x=180$

$$\frac{6}{5}x=180$$

$$x=150\ .$$

U kutiji C bilo je 150 kuglica.

Kako je 180 – 150 = 30, bilo bi premješteno 30 kuglica.

Neka je y broj kuglica u kutiji B.

Tada je $2y$ broj kuglica u kutiji A i vrijedi $\frac{1}{4}\cdot 2y+\frac{1}{3}\cdot y=30$

$$\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}y=30$$

$$\frac{5}{6}y=30$$

$$y=36$$

odnosno $2y=72$.

U kutiji A ima 72 kuglice.

2. **Prvi način.**

Tražimo $a,b\in\mathbb{N}$ tako da je $\frac{93}{91}=\frac{a}{7}+\frac{b}{13}=\frac{13a+7b}{91}$.

Dakle, $93=13a+7b$ odnosno $13a=93-7b$, $a,b\in\mathbb{N}$.

Kako je $b\geq 1$, onda je $7b\geq 7$ te je $13a=93-7b\leq 86$ što znači da je $a\leq 6$.

Iz $93 = 13a + 7b$ slijedi $7b = 93 - 13a$, a kako je $7b$ djeljiv sa 7, onda i $93 - 13a$ mora biti djeljiv sa 7.

Vrijedi

a	1	2	3	4	5	6
$93-13a$	80	67	54	41	28	15

S obzirom da je samo broj 28 djeljiv sa 7, slijedi $a = 5$ i $b = 4$.

Traženi prikaz je $\frac{93}{91} = \frac{5}{7} + \frac{4}{13}$.

Drugi način.

Tražimo $a, b \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{93}{91} = \frac{a}{7} + \frac{b}{13} = \frac{13a + 7b}{91}$.

Dakle, $93 = 13a + 7b$ odnosno $7b = 93 - 13a$, $a, b \in \mathbb{N}$.

To znači da ako od broja 93 oduzmemo višekratnik broja 13, trebamo dobiti višekratnik broja 7.

No, 93 – 13 = 80, 93 – 26 = 67, 93 – 39 = 54, 93 – 52 = 41, 93 – 65 = 28, 93 – 78 = 15, 93 – 91 = 2, a za veće višekratnike broja 13 od 91, tražena razlika više neće biti prirodni broj, što znači da je samo broj 28 odgovarajući.

Slijedi $b = 4$ i $a = 5$ te je traženi prikaz je $\frac{93}{91} = \frac{5}{7} + \frac{4}{13}$.

3. Neka su $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ bilo kojih šest prirodnih brojeva.

Pri dijeljenju prirodnog broja s 5 može biti ostatak 0, 1, 2, 3 ili 4 pa prema Dirichletovom načelu neka dva od zadanih brojeva pri dijeljenju s 5 imaju isti ostatak.

Neka su to brojevi a_i i a_j, pri čemu je $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 6$, $i \ne j$.

Tada postoje $m, n, r \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $a_i = 5 \cdot m + r$ i $a_j = 5 \cdot n + r$.

Dalje je $a_i - a_j = (5 \cdot m + r) - (5 \cdot n + r) = 5 \cdot m + r - 5 \cdot n - r = 5 \cdot (m - n)$ te je time tvrdnja dokazana.

4. Primijetimo da su trokutaste pločice jednakokračni pravokutni trokuti te da dvije trokutaste pločice spojene po hipotenuzi čine kvadratnu pločicu sukladnu kvadratnim pločicama na podu.

Površina poda iznosi $2 \cdot 3 = 6$ m^2, a na podu se nalazi 7 kvadratnih pločica i 5 kvadratnih pločica sastavljenih od po dvije trokutaste pločice. Prema tome, površina jedne kvadratne pločice iznosi $6 : 12 = 0.5$ m^2.

Površina jedne trokutaste pločice je 0.25 m^2.

Primijetimo da se uz rubove poda nalaze trokutaste pločice, uz stranicu duljine 3 m su tri takve pločice, a uz stranicu duljine 2 m dvije takve pločice.

To znači da će uz stranicu duljine 10 m biti 10, a uz stranicu duljine 20 m bit će 20 trokutastih pločica.

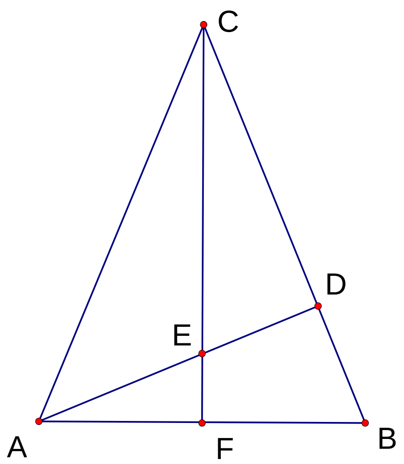
Na podu dimenzija 10 m × 20 m bit će ukupno $2 \cdot (10 + 20) = 60$ trokutastih pločica.

Pod dimenzija 10 m × 20 m ima površinu 200 m^2.

60 trokutastih pločica ima površinu $60 \cdot 0.25 = 15$ m^2, a razliku $200 - 15 = 185$ m^2 prekrivaju kvadratne pločice.

Kvadratnih pločica trebamo $185 : 0.5 = 370$.

5.



Vrijedi $|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle BAD|$ jer su to šiljasti kutovi s međusobno okomitim kracima.

Dalje je $|\sphericalangle CDE| = 90° = |\sphericalangle ADB|$ i $|CE| = |AB|$ prema uvjetima zadatka.

Zato slijedi $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DBA|$ pa prema poučku K-S-K o sukladnosti vrijedi $\Delta CED \cong \Delta ABD$.

Iz sukladnosti slijedi da je $|CD| = |AD|$ pa je ΔADC jednakokračan i pravokutan.

Veličine šiljastih kutova u ΔADC iznose 45° pa je $|\sphericalangle ACB| = 45^\circ$.

Na kraju je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBA| = \dfrac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Šibenik, 2.travnja-4.travnja 2014.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka su to razlomci $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, pri čemu su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$.

Kako je $a : c : e = 1 : 3 : 5$, onda je $c = 3a$ i $e = 5a$.

S obzirom da je $b : d = 1 : 2$, onda je $d = 2b$.

Budući da je $d : f = 4 : 9$, onda je $f = \frac{9}{4}d = \frac{9}{2}b$.

Zato vrijedi $\frac{a}{b} + \frac{3a}{2b} + \frac{5a}{\frac{9}{2}b} = \frac{65}{72}$ odnosno $\frac{a}{b} + \frac{3a}{2b} + \frac{10a}{9b} = \frac{65}{72}$.

Dalje je $\frac{18a + 27a + 20a}{18b} = \frac{65}{72}$ odnosno $\frac{65a}{18b} = \frac{65}{72}$.

Kako je $\frac{a}{b}$ neskrativ razlomak, onda slijedi $a = 1$ i $b = 4$.

Na kraju, $c = 3$, $e = 5$, $d = 8$, $f = 18$.

Traženi razlomci su $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{18}$.

2. Neka je n broj nogometnih klubova. Tada je $20 < n < 30$.

Tijekom godine odigra se $n \cdot (n-1)$ utakmica.

Neriješenih utakmica je bilo $15\% \cdot n \cdot (n-1) = \frac{15}{100} \cdot n \cdot (n-1) = \frac{3}{20} \cdot n \cdot (n-1)$.

Kako je broj neriješenih utakmica prirodni broj, slijedi da je $n \cdot (n-1)$ djeljiv s 20.

S obzirom da su n i $n-1$ uzastopni prirodni brojevi, oni su različite parnosti. To znači da je ili n djeljiv s 20 ili $n-1$ djeljiv s 20 ili je jedan od tih faktora djeljiv s 5, a drugi s 4.

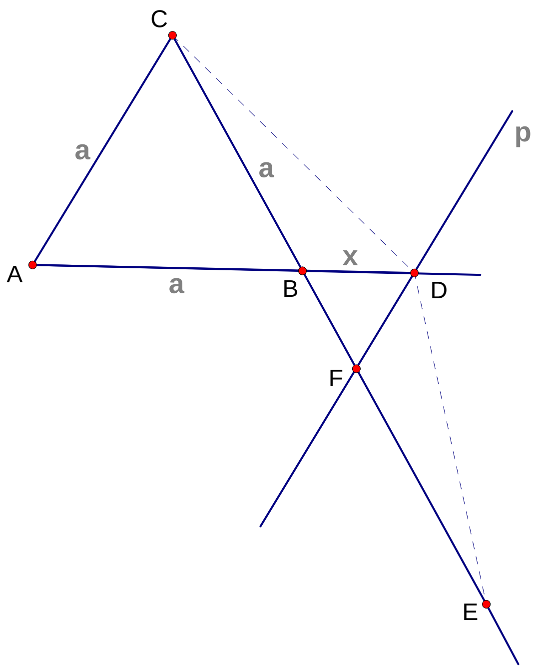
Iz

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$n-1$	20	21	22	23	24	25	26	27	28

slijedi $n \in \{ 21, 25 \}$.

Dakle, bilo je ili 63 ili 90 neriješenih utakmica.

3. Neka pravac *p* koji sadrži točku *D*, a paralelan je sa stranicom $\overline{AC}$, siječe dužinu $\overline{BE}$ u točki *F*.



Kako je $|\sphericalangle FBD| = |\sphericalangle CBA| = 60°$ (vršni kutovi) i $|\sphericalangle BDF| = |\sphericalangle BAC| = 60°$ (šiljasti kutovi s usporednim kracima), onda je ΔBFD jednakostraničan pa je $|BD| = |FD| = |BF|$.

Prema uvjetu zadatka je $|CD| = |DE|$.

Dalje je $|\sphericalangle DBC| = 180° - |\sphericalangle CBA| = 120°$ i $|\sphericalangle EFD| = 180° - |\sphericalangle DFB| = 120°$.

Prema poučku S-S-K> o sukladnosti slijedi $\Delta BDC \cong \Delta FDE$.

Iz sukladnosti slijedi $|BC| = |FE|$.

Na kraju, $|AD| = |AB| + |BD| = |BC| + |BD| = |FE| + |BF| = |BE|$.

4. Skup jednostavnih događaja je $S = \{ (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), \ldots, (4,4,3), (4,4,4) \}$ te se on sastoji od $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ člana.

Iz nejednakosti trokuta znamo da sljedeće duljine ne mogu biti duljine stranica trokuta:

1 dm, 1 dm, 2 dm (Takvih je događaja 3 – (1,1,2), (2,1,1), (1,2,1)),

1 dm, 1 dm, 3 dm (Takvih je događaja 3 – (1,1,3), (3,1,1), (1,3,1)),

1 dm, 1 dm, 4 dm (Takvih je događaja 3 – (1,1,4), (4,1,1), (1,4,1)),

1 dm, 2 dm, 3 dm (Takvih je događaja 6 – (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1)),

1 dm, 2 dm, 4 dm (Takvih je događaja 6 – (1,2,4), (1,4,2), (2,1,4), (2,4,1), (4,1,2), (4,2,1)),

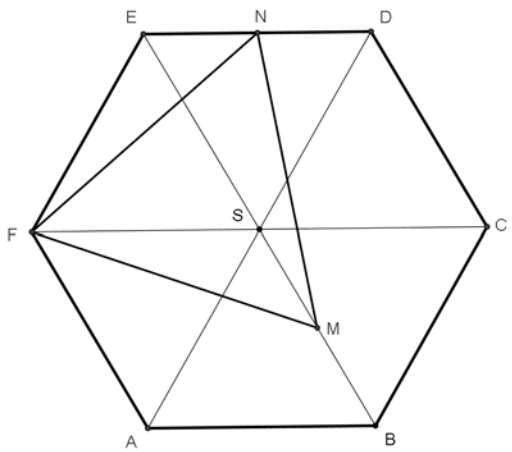
1 dm, 3 dm, 4 dm (Takvih je događaja 6 – (1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1)),

2 dm, 2 dm, 4 dm (Takvih je događaja 3 – (2,2,4), (4,2,2), (2,4,2)).

Dakle, takvih događaja ima $3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 6 + 3 = 30$.

Zato je tražena vjerojatnost $\frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.

5. Kako je *ABCDEF* pravilni šesterokut, onda su njegovi karakteristični trokuti jednakostranični.



Neka je *a* duljina stranice pravilnog šesterokuta *ABCDEF*.

Tada je $|FS| = |FE| = a$.

Dalje je $|\sphericalangle FSM| = 60° + 60° = 120°$ i $|\sphericalangle FEN| = 60° + 60° = 120°$.

Kako je točka *M* polovište dužine $\overline{BS}$, a točka *N* polovište dužine $\overline{DE}$, vrijedi $|SM| = |EN| = \frac{a}{2}$.

Prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta FMS \cong \Delta FNE$.

Iz sukladnosti slijedi $|FM| = |FN|$ i $|\sphericalangle MFS| = |\sphericalangle NFE|$.

Na kraju, $|\sphericalangle MFN| = |\sphericalangle MFS| + |\sphericalangle SFN| = |\sphericalangle NFE| + |\sphericalangle SFN| = |\sphericalangle SFE| = 60^\circ$.

Tada je i $|\sphericalangle FNM| = 60^\circ$, a to znači da je ΔNFM jednakostraničan.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Šibenik, 2.travnja-4.travnja 2014.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijedi

$$y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}=\frac{(a-(b-c))(a+(b-c))}{((b+c)+a)((b+c)-a)}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} \quad \text{pa je}$$

$$y+1=\frac{a^2-(b-c)^2+(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{a^2-b^2+2bc-c^2+b^2+2bc+c^2-a^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}.$$

Vrijedi

$$x+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \quad \text{te je}$$

$$(x+1)(y+1)=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}=2.$$

2. Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj, pri čemu je $a\in\{1,2,3,\ldots,9\}$, $b,c\in\{0,1,2,\ldots,9\}$.

Tada vrijedi $\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}=k$, gdje je k najveći mogući takav broj.

Dalje je $\overline{abc}=k(a+b+c)$

$$100a+10b+c=ka+kb+kc$$

$$(100-k)a+(10-k)b+(1-k)c=0.$$

Za $k>100$ bi bilo $100-k<0$, $10-k<0$ i $1-k<0$ te bi za svaki izbor mogućih a,b,c bilo

$(100-k)a+(10-k)b+(1-k)c<0$. Zato je $k\le 100$.

Za $k=100$ vrijedi $(10-k)b+(1-k)c=0$ te slijedi $b=0$, $c=0$.

Na kraju $a\in\{1,2,3,\ldots,9\}$.

Traženi brojevi su 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900.

3. **Prvi način.**

Neka je n broj igrača iz grada B, a k broj bodova svakog od igrača iz grada B.

Tada je ukupan broj igrača $n+2$.

Budući da je svaki par igrača igrao međusobno po jednu partiju, ukupan broj partija je

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Zbroj bodova svih igrača jednak je broju odigranih partija.

Povezivanjem ovih zaključaka dobivamo jednakost $\frac{(n+2)(n+1)}{2}=nk+8$.

Slijedi $(n+2)(n+1)=2nk+16$

$$n^2+3n+2=2nk+16$$

$$n^2+3n-2nk=16-2$$

$$n(n+3-2k)=14.$$

Brojevi n i $2k$ su prirodni pa n mora biti djelitelj broja 14.

Za $n=1$ je $n+3-2k=14$ pa je $k=-5$ što nije moguće.

Za $n=2$ je $n+3-2k=7$ pa je $k=-1$ što nije moguće.

Za $n=7$ je $n+3-2k=2$ pa je $k=4$.

Za $n=14$ je $n+3-2k=1$ pa je $k=8$.

Preostaje pokazati primjerima da su obje ove situacije moguće.

Neka su A_1 i A_2 igrači iz grada A, a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ igrači iz grada B.

Za $n=7$ svaki igrač je odigrao 8 partija. Ako su sve partije završile neriješeno, onda će svi igrači imati 4 boda i uvjeti zadatka su zadovoljeni.

Za $n=14$ svaki igrač je odigrao 15 partija.

Neka su neriješeno završile partije:
- između igrača A_1 i A_2,
- između igrača A_1 i svakog od igrača $B_1,\ldots,B_7$,
- između igrača A_2 i svakog od igrača $B_8,\ldots;B_{14}$,
- između svaka dva igrača iz grada B,

Neka su sve ostale partije završile pobjedom igrača iz grada B. Tada će svaki igrač iz grada A imati ukupno 4 boda, a svaki igrač iz grada B ukupno 8 bodova i uvjeti zadatka su ispunjeni.

Drugi način.

Neka je n broj igrača iz grada B, a k broj bodova svakog od igrača iz grada B.

Tada je ukupan broj igrača $n + 2$.

Budući da je svaki par igrača igrao međusobno po jednu partiju, ukupan broj partija je

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Zbroj bodova svih igrača jednak je broju odigranih partija.

Povezivanjem ovih zaključaka dobivamo jednakost $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = nk + 8$.

Slijedi $(n+2)(n+1) = 2nk + 16$

$$n^2 + 3n + 2 = 2nk + 16$$

$$2nk = n^2 + 3n + 2 - 16$$

$$2k \cdot n = n^2 + 3n - 14$$

$$2k = \frac{n^2 + 3n - 14}{n} = n + 3 - \frac{14}{n}.$$

Budući da $2k$ mora biti prirodan broj, zaključujemo da n mora biti djelitelj broja 14.

Za $n = 1$ je $2k = -10$ pa je $k = -5$ što nije moguće.

Za $n = 2$ je $2k = -2$ pa je $k = -1$ što nije moguće.

Za $n = 7$ je $2k = 8$ pa je $k = 4$.

Za $n = 14$ je $2k = 16$ pa je $k = 8$.

Preostaje pokazati primjerima da su obje ove situacije moguće.

Neka su A_1 i A_2 igrači iz grada A, a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ igrači iz grada B.

Za $n = 7$ svaki igrač je odigrao 8 partija. Ako su sve partije završile neriješeno, onda će svi igrači imati 4 boda i uvjeti zadatka su zadovoljeni.

Za $n = 14$ svaki igrač je odigrao 15 partija.

Neka su neriješeno završile partije: -između igrača A_1 i A_2,

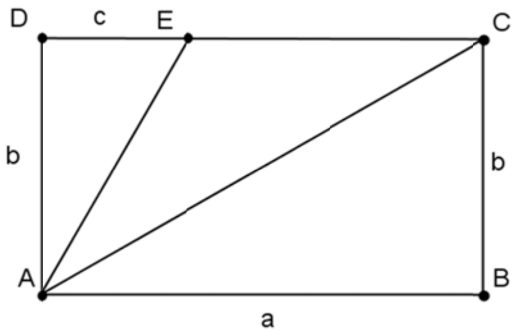
-između igrača A_1 i svakog od igrača $B_1, \ldots, B_7$,

-između igrača A_2 i svakog od igrača $B_8,\ldots,;B_{14}$,

-između svaka dva igrača iz grada B,

Neka su sve ostale partije završile pobjedom igrača iz grada B. Tada će svaki igrač iz grada A imati ukupno 4 boda, a svaki igrač iz grada B ukupno 8 bodova i uvjeti zadatka su ispunjeni.

4.



Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutni trokut *ABC*, vrijedi $|AC|^2 = a^2 + b^2$ odnosno

$|AC|^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2$ pa je $|AC| = 6$ cm.

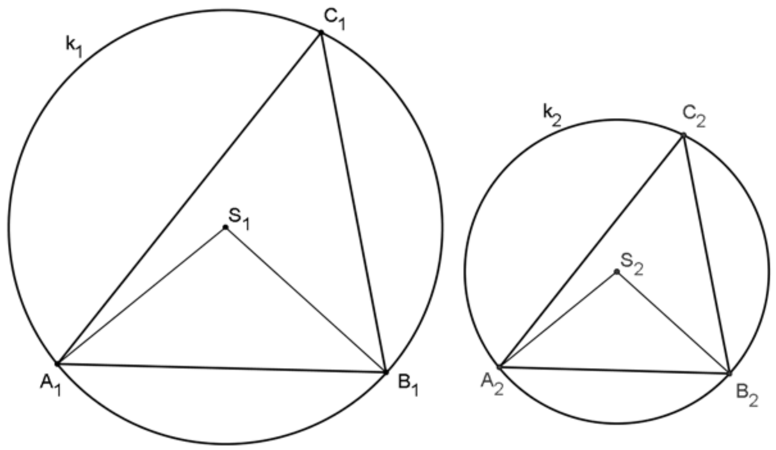
To je dvostruko više od duljine stranice *b* što znači da je trokut *ABC* polovina jednakostraničnog trokuta. Dakle, $|\sphericalangle BAC| = 30°$ pa je $|\sphericalangle CAD| = 60°$ odnosno $|\sphericalangle EAD| = 30°$.

To znači da je trokut *AED* polovina jednakostraničnog trokuta te primjenom Pitagorinog poučka slijedi $|AE|^2 = |DE|^2 + |AD|^2$ odnosno $(2c)^2 = c^2 + 3^2$ pa je $c = \sqrt{3}$ cm.

Dalje je $|EC| = |DC| - |DE|$ te je $|EC| = 2\sqrt{3}$ cm.

Na kraju, $P_{\Delta ACE} = \dfrac{|EC| \cdot |AD|}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$ cm^2.

5.



Kako je $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, onda je $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ i $\gamma_1 = \gamma_2$.

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $|\sphericalangle A_1S_1B_1| = 2\gamma_1$ odnosno $|\sphericalangle A_2S_2B_2| = 2\gamma_2$.

Dakle, $|\sphericalangle A_1S_1B_1| = 2\gamma_1 = 2\gamma_2 = |\sphericalangle A_2S_2B_2|$.

S obzirom da je $|A_1S_1| = |S_1B_1| = r_1$, onda je $\Delta A_1B_1S_1$ jednakokračan te je $|\sphericalangle B_1A_1S_1| = \dfrac{180° - 2\gamma_1}{2}$.

Isto tako je $|A_2S_2| = |S_2B_2| = r_2$ pa je $\Delta A_2B_2S_2$ jednakokračan i vrijedi $|\sphericalangle B_2A_2S_2| = \dfrac{180° - 2\gamma_2}{2}$.

Dakle, $|\sphericalangle B_1A_1S_1| = |\sphericalangle B_2A_2S_2|$.

Prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\Delta A_1B_1S_1 \sim \Delta A_2B_2S_2$ pa je $\dfrac{|A_2S_2|}{|A_1S_1|} = \dfrac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}$ odnosno

$\dfrac{r_2}{r_1} = k$ što je i trebalo dokazati.