ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Izračunajte $\dfrac{1234321234321 \cdot 2468642468641 - 1234321234320}{1234321234320 \cdot 2468642468641 + 1234321234321}$.

Rješenje. Neka je $n = 1234321234321$. (1 bod)

Tada je dani izraz ekvivalentan izrazu

$$\frac{n \cdot (2n-1) - (n-1)}{(n-1) \cdot (2n-1) + n} = \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{2n^2 - n - n + 1}{2n^2 - 2n - n + 1 + n} = \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 - 2n + 1} = 1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-1.2. Napišite kao potenciju s bazom 5:

$$3\left(5^n - 5\right)\left(5^n + 5\right) + 2\left(25 + 5^{2n}\right) + 25^{n+1} : 5^{2n}.$$

Rješenje.

$$3\left(5^n - 5\right)\left(5^n + 5\right) + 2\left(25 + 5^{2n}\right) + 25^{n+1} : 5^{2n} =$$

$$3 \cdot \left(5^{2n} - 25\right) + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5^{2n} + 5^{2n+2} : 5^{2n} = \qquad \text{(1 bod)}$$

$$3 \cdot 5^{2n} - 75 + 50 + 2 \cdot 5^{2n} + 5^2 = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$5 \cdot 5^{2n} = 5^{2n+1}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-1.3. Škola je raspisala natječaj za najbolje uređenu učionicu. Iznos novčane nagrade će raspodijeliti na četiri prvoplasirana odjeljenja tako da prvoplasirani dobije 40% ukupnog iznosa, drugoplasirani $\frac{1}{3}$ ukupnog iznosa, trećeplasirani $\frac{5}{8}$ od preostalog iznosa nagrade, a četvrti 1500 kn. Odredite ukupni novčani iznos nagrade te iznos nagrade za svako od prva tri mjesta.

Rješenje. Neka je x ukupan iznos novčane nagrade. Tada je

$$0.4x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{8}\left(x - 0.4x - \frac{1}{3}x\right) + 1500 = x$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + 1500 = x \qquad \text{(2 boda)}$$

$$12x + 10x + 5x + 45000 = 30x$$

$$3x = 45000$$

$$x = 15000. \qquad \text{(1 bod)}$$

Prva nagrada je 6000 kn, druga 5000 kn, a treća 2500 kn. (1 bod)

Zadatak B-1.4. Zadan je broj 123456789. Koliko najmanje znamenaka treba izbrisati da novi broj bude djeljiv s 36? Koje su to znamenke?

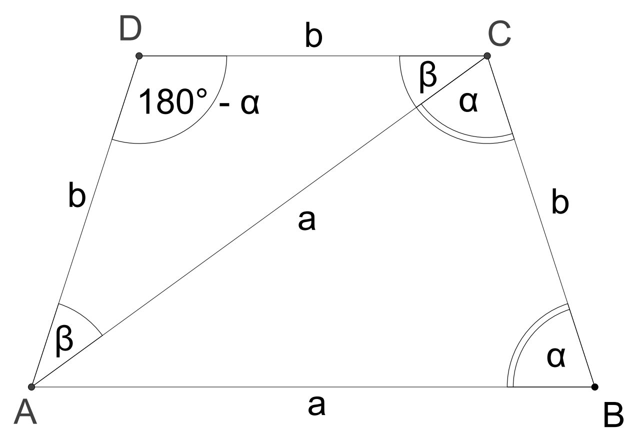
Rješenje. Da bi dani broj bio djeljiv sa 4, mora biti paran i njegov dvoznamenkasti završetak mora biti djeljiv sa četiri. Stoga moramo izbrisati zadnju znamenku 9 i znamenku 7. Tada broj završava sa 68, što je djeljivo sa 4. (2 boda)

Traženi broj mora biti djeljiv i s 9, što znači da njegov zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 9. Kako je sada zbroj znamenaka 29, preostalo je još samo izbrisati znamenku 2 da bi dobili 27, što je djeljivo s 9.

I to je jedina takva mogućnost jer sljedeći broj djeljiv s 9 je 18, a njega je nemoguće dobiti brisanjem samo jedne znamenke. (2 boda)

Zadatak B-1.5. Jednakokračni trapez, koji nema pravih kutova, podijeljen je dijagonalom na dva jednakokračna trokuta. Odredite kutove trapeza.

Rješenje. Skica (1 bod)



Vrijedi $\beta + \alpha = 180° - \alpha$, odnosno $2\alpha + \beta = 180°$. (1 bod)

S druge strane je

$$\begin{aligned} 180° - \alpha + \beta + \beta &= 180° \\ 2\beta &= \alpha \end{aligned}$$ (1 bod)

Tada je $2 \cdot 2\beta + \beta = 180°$, odnosno $5\beta = 180°$ ili $\beta = 36°$, $\alpha = 72°$. (1 bod)

Kutovi trapeza su $\alpha = 72°$ i $\alpha + \beta = 108°$.

Zadatak B-1.6. U ovisnosti o realnom parametru m, odredite rješenje x jednadžbe

$$(m+x)^2-(x-3)^2=x\left(3+m^2\right).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(m+x)^2-(x-3)^2&=x(3+m^2)\\
m^2+2mx+x^2-x^2+6x-9&=3x+m^2x &&\text{(1 bod)}\\
2mx-m^2x+3x&=9-m^2\\
x(3+2m-m^2)&=9-m^2 &&\text{(1 bod)}\\
x(3+3m-m-m^2)&=(3-m)(3+m)\\
x\left(3(1+m)-m(1+m)\right)&=(3-m)(3+m)\\
x(1+m)(3-m)&=(3-m)(3+m) &&(*)
\end{aligned}$$

(2 boda)

Za $m\neq-1$, $m\neq3$ dana jednadžba ima jedinstveno rješenje (1 bod)

$$x=\frac{(3-m)(3+m)}{(1+m)(3-m)}=\frac{3+m}{1+m}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Za $m=-1$, iz (*) slijedi $0=8$ pa dana jednadžba nema rješenja. (2 boda)

Za $m=3$, iz (*) slijedi $0=0$ pa je dana jednadžba neodređena i svaki realni broj x je njezino rješenje. (2 boda)

Zadatak B-1.7. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\dfrac{6n^2-10n-12}{3n-5}$ prirodan broj.

Rješenje. Zapišimo dani razlomak u pogodnijem obliku:

$$\begin{aligned}
\frac{6n^2-10n-12}{3n-5}&=\frac{2n(3n-5)-12}{3n-5}\\
&=2n-\frac{12}{3n-5}. &&\text{(4 boda)}
\end{aligned}$$

Da bi dobiveni izraz bio prirodan broj mora vrijediti

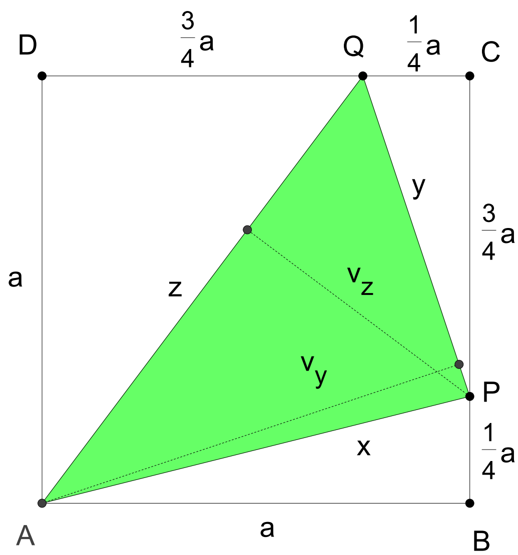
$$\begin{aligned}
(3n-5)&\in\{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12\}\\
3n&\in\{6,4,7,3,8,2,9,1,11,-1,17,-7\} &&\text{(2 boda)}\\
n&\in\{1,2,3\}. &&\text{(1 bod)}
\end{aligned}$$

S obzirom da je $\dfrac{6n^2-10n-12}{3n-5}\in\mathbb{N}$, to mora biti $2n>\dfrac{12}{3n-5}$ (2 boda)

pa su rješenja $n=1$ ili $n=3$. (1 bod)

Zadatak B-1.8. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ dane su točke P i Q takve da je
$\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{CQ} : \overline{QD} = 1 : 3$. Ako je duljina stranice kvadrata a, odredite duljinu najveće i najmanje visine trokuta APQ.

Rješenje. Skica (1 bod)



Stranice trokuta APQ označimo sa x, y, z. Njihove duljine računamo koristeći Pitagorin poučak.

$$x^2 = a^2 + \frac{1}{16}a^2, \quad x = \frac{\sqrt{17}}{4}a$$
$$y^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2 = \frac{10}{16}a^2, \quad y = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$
$$z^2 = a^2 + \frac{9}{16}a^2 = \frac{25}{16}a^2, \quad z = \frac{5}{4}a$$
(2 boda)

(Napomena: dovoljno je izračunati dvije stranice y i z)

Najdulja visina je na najkraću stranicu, a najkraća visina je na najdulju stranicu. (1 bod)

Računat ćemo ih koristeći površinu trokuta APQ.

$$P = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}a - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot a = \frac{13}{32}a^2.$$
(2 boda)

Tada je najkraća visina

$$v_z = \frac{2P}{z} = \frac{2 \cdot \frac{13}{32}a^2}{\frac{5}{4}a} = \frac{13}{20}a.$$
(2 boda)

Najdulja visina je

$$v_y = \frac{2P}{y} = \frac{2 \cdot \frac{13}{32}a^2}{\frac{\sqrt{10}}{4}a} = \frac{13}{4\sqrt{10}}a = \frac{13\sqrt{10}}{40}a. \qquad \text{(2 boda)}$$

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Izračunajte:

$$\left[\frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\right]^{2012}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\left[\frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\right]^{2012} &= \left[\frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}\right]^{2012} && \text{(1 bod)}\\ &= \left[\frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i}{6+2}\right]^{2012} && \text{(1 bod)}\\ &= \left[\frac{(1-i)^2}{2}\right]^{1006} = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{1006} = (-i)^{1006} && \text{(1 bod)}\\ &= -1 && \text{(1 bod)}\end{aligned}$$

Zadatak B-2.2. U kružnici polumjera $r = 10$ cm povučene su dvije paralelne tetive duljina 16 cm i 12 cm. Ako se središte kružnice nalazi unutar trapeza kojemu su te tetive osnovice, izračunajte opseg trapeza.

Rješenje. Skica (1 bod)

Promotrimo jednakokračan trokut ABS. Visina na osnovicu jednaka je

$$v_1 = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm}.$$

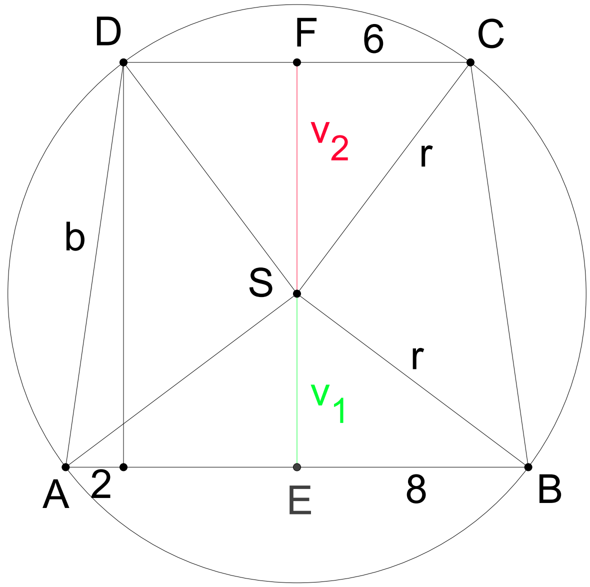
Iz trokuta SCD dobijemo

$$v_2 = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}. \quad \text{(1 bod)}$$

Duljina kraka trapeza je tada

$$b = \sqrt{(v_1+v_2)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{14^2+2^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}. \quad \text{(1 bod)}$$

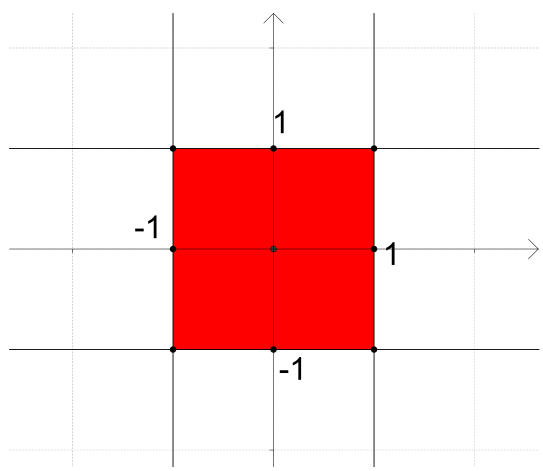
Opseg trapeza je $o = a + 2b + c = 4(7+5\sqrt{2})$. (1 bod)



Zadatak B-2.3. Izračunajte površinu lika kojeg u kompleksnoj ravnini određuje skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|\operatorname{Re} z| \leq 1$, $|\operatorname{Im} z| \leq 1$.

Rješenje. Označimo $z = x + yi$. Tada je, prema uvjetima zadatka, $|x| \leq 1$ i $|y| \leq 1$.

(1 bod)



Skica (2 boda)

Stranica kvadrata je 2 pa je njegova površina 4 kvadratne jedinice. (1 bod)

Zadatak B-2.4. Neka je $f(x) = x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Ako je $f(0) + f(1) = \frac{1}{2}$, izračunajte $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Rješenje.

$$f(0) = c, \quad f(1) = 1 + b + c \tag{1 bod}$$

Iz $f(0) + f(1) = c + 1 + b + c = 2c + b + 1 = \frac{1}{2}$ (1 bod)

slijedi $2c + b = -\frac{1}{2}$, (1 bod)

odnosno $c + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4}$. Tada je

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}b + c = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0. \tag{1 bod}$$

Zadatak B-2.5. Odredite sve prirodne brojeve m tako da jednadžba $|x^2 - 5x + 4| = m$ ima točno četiri različita realna rješenja.

Prvo rješenje. Kako je m prirodan broj, vrijedi $x^2 - 5x + 4 = m$ ili $x^2 - 5x + 4 = -m$, tj.

$$x^2 - 5x + 4 - m = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 - 5x + 4 + m = 0. \tag{1 bod}$$

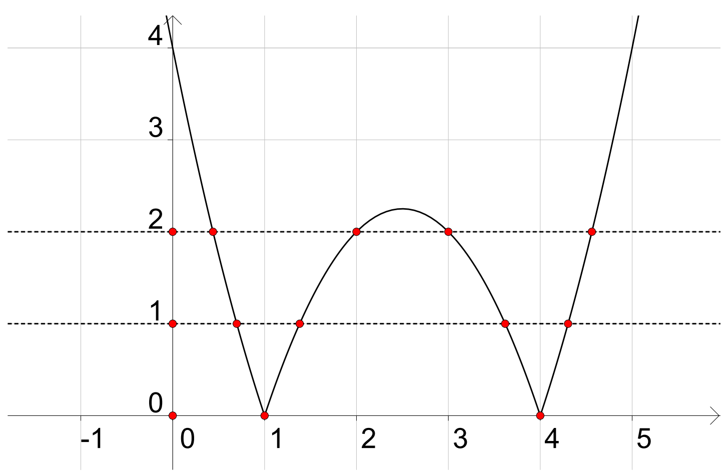
Svaka od ovih jednadžbi će imati dva različita realna rješenja ako je njezina diskriminanta veća od 0. Dakle, mora vrijediti

$$25 - 4 \cdot (4 - m) > 0 \quad \text{i} \quad 25 - 4 \cdot (4 + m) > 0. \tag{1 bod}$$

Odatle slijedi $m > -\frac{9}{4}$ i $m < \frac{9}{4}$. (1 bod)

Kako je $m \in \mathbb{N}$, slijedi $m = 1$ ili $m = 2$. (1 bod)

Drugo rješenje. Nacrtamo graf funkcije $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$.



(2 boda)

Pravac $y = m$ siječe graf funkcije f u 4 različite točke ako je $m = 1$ ili $m = 2$. (2 boda)

Zadatak B-2.6. Odredite sve kvadratne jednadžbe oblika $x^2 + px + q = 0$ ako za koeficijente $p, q \in \mathbb{R}$ vrijedi $|p-q| = 2012$, a zbroj kvadrata njezinih rješenja iznosi 2012^2.

Prvo rješenje. Iz $x_1^2 + x_2^2 = 2012^2$ i Vieteovih formula slijedi

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 2012^2 \\ p^2 - 2q &= 2012^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

(2 boda)

Kako je $|p-q| = 2012$, imamo dva slučaja

$$p - q = 2012 \quad \text{ili} \quad p - q = -2012,$$

odnosno dva sustava jednadžbi

$$\begin{cases} p - q = 2012 \\ p^2 - 2q = 2012^2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} p - q = -2012 \\ p^2 - 2q = 2012^2 \end{cases}.$$ (2 boda)

U prvom slučaju $q = p - 2012$, što s (*) daje

$$p^2 - 2p - 2010 \cdot 2012 = 0$$

odnosno

$$(p - 2012)(p + 2010) = 0.$$

Tada su rješenja prvog sustava

$$p_1 = 2012, q_1 = 0 \quad \text{i} \quad p_2 = -2010, q_2 = -4022.$$ (2 boda)

U drugom slučaju $q = p + 2012$, što s (*) daje

$$p^2 - 2p - 2014 \cdot 2012 = 0$$

odnosno

$$(p - 2014)(p + 2012) = 0.$$

Tada su rješenja drugog sustava

$$p_3 = 2014, q_3 = 4026 \quad \text{i} \quad p_4 = -2012, q_4 = 0.$$ (2 boda)

Kvadratne jednadžbe su

$$\begin{aligned} x^2 + 2012x &= 0 \\ x^2 - 2012x &= 0 \\ x^2 + 2014x + 4026 &= 0 \\ x^2 - 2010x - 4022 &= 0 \end{aligned}$$ (2 boda)

Drugo rješenje. Iz $x_1^2 + x_2^2 = 2012^2$ i Vieteovih formula slijedi

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 2012^2 \\ p^2 - 2q &= 2012^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

(2 boda)

Kvadriranjem jednakosti $|p-q|=2012$ imamo

$$p^2-2pq+q^2=2012^2 \qquad \text{(1 bod)}$$

Oduzimanjem jednakosti $p^2-2q=2012^2$ i $p^2-2pq+q^2=2012^2$ dobivamo $q^2-2pq+2q=0$, odnosno

$$q(q-2p+2)=0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Odatle je $q=0$ ili $q-2p+2=0$.

U slučaju $q=0$, iz (*) dobivamo $p=\pm 2012$. (2 boda)

U drugom slučaju $q=2p-2$, iz (*) dobivamo

$$p^2-4p+4=2012^2, \quad (p-2)^2=2012^2.$$

Rješenja su $p_1=2014$, $q_1=4026$ i $p_2=-2010$, $q_2=-4022$. (2 boda)

Kvadratne jednadžbe su

$$\begin{aligned} x^2+2012x&=0\\ x^2-2012x&=0\\ x^2+2014x+4026&=0\\ x^2-2010x-4022&=0 \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.7. Danas je Valentinovo i Valentino želi izaći sa svojom djevojkom Lornom. Za svoj džeparac od 120 kuna može kupiti nekoliko ruža i dvije limunade. Cijena jedne ruže jednaka je cijeni jedne limunade. Kako sutra pišu test iz matematike, izlazak će ipak odgoditi do subote. U subotu će se cijena jedne ruže smanjiti za 7 kuna. Valentino želi kupiti isti broj ruža, a umjesto limunade želi kupiti jumbo pizzu i coca colu, kojima je ukupna cijena 78 kn. No tada bi mu nedostajalo 6 kuna. Koliko će ruža Valentino kupiti Lorni? Po kojoj će cijeni kupovati ruže u subotu?

Rješenje. Označimo sa x broj ruža, a s y cijenu jedne ruže na Valentinovo. Iz uvjeta zadatka imamo

$$\begin{aligned} xy+2y&=120\\ x(y-7)+78&=126 \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješavamo sustav

$$\begin{cases} xy+2y=120\\ xy-7x=48 \end{cases} \qquad \text{(1 bod)}$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $y=\frac{120}{x+2}$ i uvrstimo u drugu, dobivamo

$$x\cdot\frac{120}{x+2}-7x=48, \qquad \text{(1 bod)}$$

koja se svodi na kvadratnu jednadžbu

$$7x^2 - 58x + 96 = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Njezino cjelobrojno rješenje je $x = 6$. (2 boda)

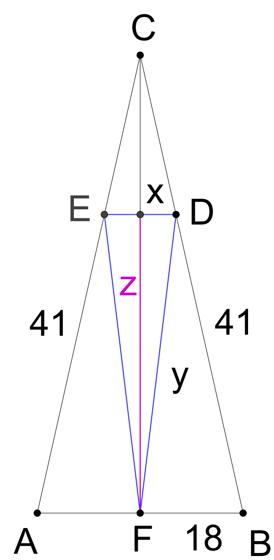
Tada je $y = \frac{120}{6+2} = 15$. (1 bod)

Valentino će kupiti 6 ruža, a ako ih kupuje u subotu, plaćat će ih 8 kn po komadu.

(1 bod)

Zadatak B-2.8. Jednakokračnom trokutu ABC s osnovicom duljine 18 cm i krakom duljine 41 cm upišite jednakokračan trokut DEF maksimalne površine, tako da su osnovice dvaju trokuta paralelne, a da je vrh upisanog trokuta u polovištu osnovice zadanog. Odredite duljine stranica trokuta DEF.

Rješenje. Skica (1 bod)



Visina $|CF|$ jednakokračnog trokuta ABC je $\sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ cm. Neka je z visina trokuta DEF. Iz sličnosti trokuta ABC i EDC imamo:

$$18 : 40 = x : (40 - z) \qquad \text{(1 bod)}$$

$$z = \frac{360 - 20x}{9} \qquad \text{(2 boda)}$$

Površina trokuta DEF jednaka je

$$P = \frac{xz}{2}$$

$$P = \frac{x(360 - 20x)}{18}$$

$$P = -\frac{10}{9}x^2 + 20x. \qquad \text{(2 boda)}$$

Maksimalna površina se postiže za

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{20}{\frac{20}{9}} = 9 \text{ cm.} \qquad \text{(2 boda)}$$

Duljina kraka tog trokuta je

$$y = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 20^2} = \frac{41}{2} \text{ cm.} \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena: Za pogođeno rješenje dati 1 bod.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite nejednadžbu

$$2012^{2x} - 2012^{x} - 2011 \cdot 2012 \geq 0.$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $t = 2012^x$. Rješavamo nejednadžbu

$$t^2 - t - 2011 \cdot 2012 \geq 0 \quad \text{ili} \quad (t-2012)\cdot(t+2011) \geq 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Njezino je rješenje

$$t \leq -2011 \quad \text{ili} \quad t \geq 2012. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dakle,

$$2012^x \leq -2011 \quad \text{ili} \quad 2012^x \geq 2012. \qquad \text{(1 bod)}$$

Prva je nejednadžba nemoguća, a iz druge slijedi $x \geq 1$. (1 bod)

Zadatak B-3.2. Odredite sva rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Rješenje. Dana se jednadžba može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \sin x \cos x - \sin^2 x &= 0 \\ \sin x(\cos x - \sin x) &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$$\sin x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos x - \sin x = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz $\sin x = 0$ slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (1 bod)

a iz $\cos x - \sin x = 0$, tj. $\operatorname{tg} x = 1$ slijedi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadatak B-3.3. Odredite temeljni period funkcije $f(x) = 8\sin^2 x\cos^2 x - 2\cos^2 2x$.

Rješenje. Zapišimo funkciju f kao

$$f(x) = 2(2\sin x\cos x)^2 - 2\cos^2 2x = 2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2\cos 4x. \qquad \text{(3 boda)}$$

Temeljni period ove funkcije je $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. (1 bod)

Zadatak B-3.4. Koliko ima jednakokračnih trokuta kojima su duljine stranica cjelobrojne, a opseg jednak 30 cm?

Rješenje. Neka je a duljina osnovice, a b duljina kraka jednakokračnog trokuta. Iz $a + 2b = 30$ slijedi da a mora biti paran broj, a iz nejednakosti duljina stranica trokuta $a < b + b = 2b$.

(2 boda)

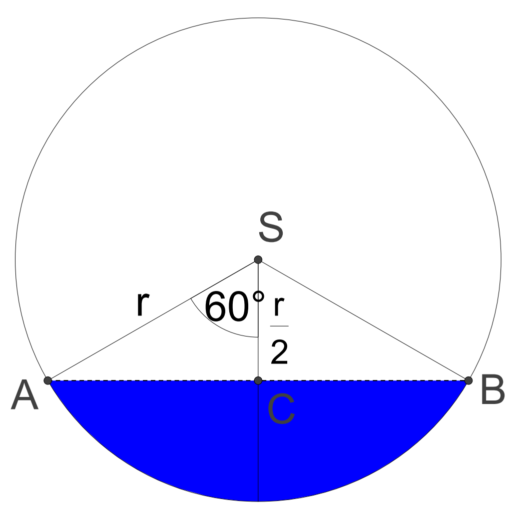
Dakle, $a \leq 14$ i paran je broj pa je moguće jedino ovih 7 slučajeva:

$$(a, b) \in \{(2, 14), (4, 13), (6, 12), (8, 11), (10, 10), (12, 9), (14, 8)\}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Ako učenik nema mogućnost da je $a = b = 10$ cm, treba mu oduzeti 1 bod.

Zadatak B-3.5. Bačva ima oblik uspravnog valjka kojemu je os u horizontalnom položaju, a duljina polumjera osnovke 2 dm, te duljina visine 6 dm. Bačva je uronjena u vodu do polovine polumjera osnovke. Izračunajte obujam uronjenog dijela bačve.

Rješenje.



Kut $\angle ASC = 60^\circ$ pa je kut $\alpha = \angle ASB = 120^\circ$. (1 bod)

Računamo obujam dijela valjka kojem je osnovka kružni odsječak sa središnjim kutem $\alpha = 120^\circ$, a visina v, po formuli

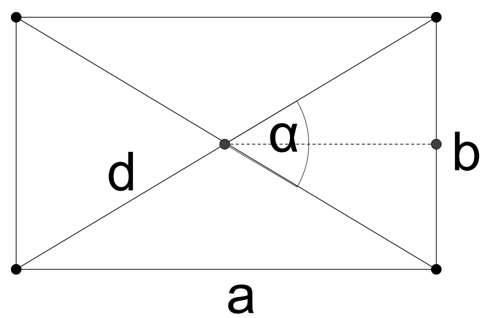
$$V = B\cdot v = \left(\frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2}r^2\sin\alpha\right)v = \left(\frac{r^2\pi}{3} - \frac{1}{2}r^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v = r^2v\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 8\pi - 6\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

(3 boda)

Napomena: Površina trokuta ABS se može računati i kao dvije površine trokuta ACS korištenjem trigonometrije ili bez nje.

Zadatak B-3.6. Površina pravokutnika iznosi 12 cm^2, a ako se šiljasti kut između njegovih dijagonala smanji na pola, površina iznosi 7.5 cm^2. Koliko iznosi duljina dijagonale pravokutnika?

Rješenje.



Ako je kut između dijagonala α, površina je

$$P = 4\cdot\frac{\frac{d}{2}\frac{d}{2}\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha = 12 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$d^2\sin\alpha = 24 \qquad (1)$$

Ako je kut između dijagonala $\frac{\alpha}{2}$, površina je

$$P_1 = \frac{1}{2}d^2\sin\frac{\alpha}{2} = 7.5$$

$$d^2\sin\frac{\alpha}{2} = 15 \qquad (2)$$

(1 bod)

Podijelimo li jednadžbe (1) i (2), dobivamo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{8}{5} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{8}{5} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$d^2 = \frac{15}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{15}{\frac{3}{5}} = 25 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$d = 5 \text{ cm} \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena: Površina pravokutnika se može izračunati i pomoću duljina stranica pravokutnika a, b:

$$a = d\cos\frac{\alpha}{2}, \quad b = d\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$P = a \cdot b = d\cos\frac{\alpha}{2} \cdot d\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha.$$

Zadatak B-3.7. Riješite sustav jednadžbi

$$x = 2^{\frac{4}{1+\log_2 z}}$$

$$y = 2^{\frac{4}{1+\log_2 x}}$$

$$z = 2^{\frac{9}{1+\log_2 y}}$$

Rješenje. Logaritmiranjem (po bazi 2) danih jednadžbi, dani sustav prelazi u

$$\log_2 x = \frac{4}{1+\log_2 z}$$

$$\log_2 y = \frac{4}{1+\log_2 x}$$

$$\log_2 z = \frac{9}{1+\log_2 y}, \qquad \text{(1 bod)}$$

gdje su x, y, z pozitivni realni brojevi različiti od $\frac{1}{2}$.

Nakon uvođenja supstitucije

$$a = \log_2 x$$

$$b = \log_2 y$$

$$c = \log_2 z$$

sustav prelazi u

$$\begin{aligned}
a &= \frac{4}{1+c} \\
b &= \frac{4}{1+a} \\
c &= \frac{9}{1+b} && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Ako iz prve jednadžbe a uvrstimo u drugu jednadžbu, sustav svodimo na dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned}
b\left(1+\frac{4}{1+c}\right) &= 4 \\
c &= \frac{9}{1+b}
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\begin{cases} b\left(\frac{5+c}{1+c}\right) & = 4 \\ 1+b & = \frac{9}{c} \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} b & = 4 \cdot \frac{1+c}{5+c} \\ b & = \frac{9}{c} - 1 \end{cases}$$

Slijedi jednadžba

$$4 \cdot \frac{1+c}{5+c} = \frac{9}{c} - 1. \qquad \text{(2 boda)}$$

Odatle dobivamo $c^2 = 9$, $c_1 = 3$, $c_2 = -3$. (1 bod)

Iz prvog rješenja $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$ slijedi $\log_2 x = 1$, $\log_2 y = 2$, $\log_2 z = 3$ (1 bod)

odnosno $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $z_1 = 8$. (1 bod)

Iz drugog rješenja $a_2 = -2$, $b_2 = -4$, $c_2 = -3$ slijedi $\log_2 x = -2$, $\log_2 y = -4$, $\log_2 z = -3$ (1 bod)

odnosno $x_2 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{16}$, $z_2 = \frac{1}{8}$. (1 bod)

Zadatak B-3.8. Dokažite da u pravokutnom trokutu s katetama a i b, te redom nasuprotnim kutovima α i β, $a > b$, vrijedi

Prvo rješenje.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{1+\cos(\alpha-\beta)} = \frac{1-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{1+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)} && \text{(2 boda)} \\
&= \frac{1-\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}-\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}} = \frac{c^2-2ab}{c^2+2ab} && \text{(2 boda)} \\
&= \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab} && \text{(2 boda)} \\
&= \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Iz jednakosti

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

i uvjeta $a > b$ slijedi

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje. Trokut je pravokutan pa je $\alpha + \beta = 90°$, tj.

$$\alpha = 90° - \beta. \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg} \frac{90° - \beta - \beta}{2} = \operatorname{tg}(45° - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg}\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(4 boda)}$$

U pravokutnom trokutu je $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$, tj. (2 boda)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a-b}{a+b}. \qquad \text{(2 boda)}$$

što je trebalo i dokazati.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

14. veljače 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{(2n-4)!}=\frac{1}{(2n-3)!}+\frac{8}{(2n-2)!}.$$

Rješenje. Broj n mora zadovoljavati uvjet $n \geq 2$.

Pomnožimo li jednadžbu

$$\frac{1}{(2n-4)!}=\frac{1}{(2n-3)!}+\frac{8}{(2n-2)!}$$

s $(2n-2)!$, (1 bod)

dobivamo

$$(2n-2)(2n-3)=2n-2+8,$$

tj. $n^2-3n=0$. (1 bod)

Rješenja posljednje jednadžbe su $n=0$ i $n=3$. (1 bod)

No, jedino rješenje $n=3$ zadovoljava uvjet $n \geq 2$. (1 bod)

Zadatak B-4.2. Za koje vrijednosti realnog broja x u razvoju binoma $\left(\sqrt{5^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{25^x}}\right)^6$ treći član iznosi 75?

Rješenje. Treći član u razvoju binoma $\left(\sqrt{5^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{25^x}}\right)^6$ iznosi

$$\binom{6}{2}\left(\sqrt{5^x}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{25^x}}\right)^2 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$=15\cdot 5^{2x}\cdot 5^{-\frac{4x}{3}}=3\cdot 5^{1-\frac{2x}{3}}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je $3\cdot 5^{1-\frac{2x}{3}}=75$, odnosno $5^{1-\frac{2x}{3}}=25$ (1 bod)

pa je $1-\frac{2x}{3}=2$ i konačno $x=-\frac{3}{2}$. (1 bod)

Zadatak B-4.3. Je li broj $\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ racionalan? Dokažite.

Prvo rješenje.

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{4+2-4\sqrt{2}}-\sqrt{4+2+4\sqrt{2}}= \qquad \text{(1 bod)}$$

$$=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=|2-\sqrt{2}|-|2+\sqrt{2}|=-2\sqrt{2}.$$

(2 boda)

Broj je iracionalan. (1 bod)

Drugo rješenje. Neka je $x=\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$. Nakon kvadriranja slijedi

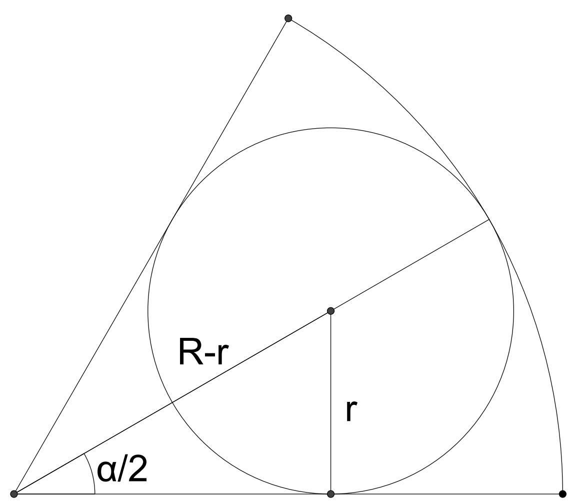
$$x^2=12-2\sqrt{36-32}, \qquad \text{(2 boda)}$$

tj. $x^2=8$. (1 bod)

Ova jednadžba nema racionalnih rješenja pa je dani broj iracionalan. (1 bod)

Zadatak B-4.4. U kružni isječak upisan je krug. Izračunajte omjer površina kružnog isječka i upisanog kruga, ako je omjer njihovih polumjera 3 : 1.

Rješenje. Skica (1 bod)



Ako je $R:r=3:1$, tada je $R=3r$, a $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{R-r}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$ pa je $\alpha=60^\circ$. (2 boda)

Tada je traženi omjer

$$\frac{P_i}{P_k}=\frac{R^2\pi\frac{\alpha}{360^\circ}}{r^2\pi}=\frac{\alpha}{40^\circ}=\frac{3}{2}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.5. Neka je $z = -\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$ kompleksan broj. Odredite najmanji prirodan broj n tako da realni dio broja z^n iznosi 0.

Rješenje. Zapišimo broj $z = -\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$ u trigonometrijskom obliku:

$$z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}. \qquad \text{(1 bod)}$$

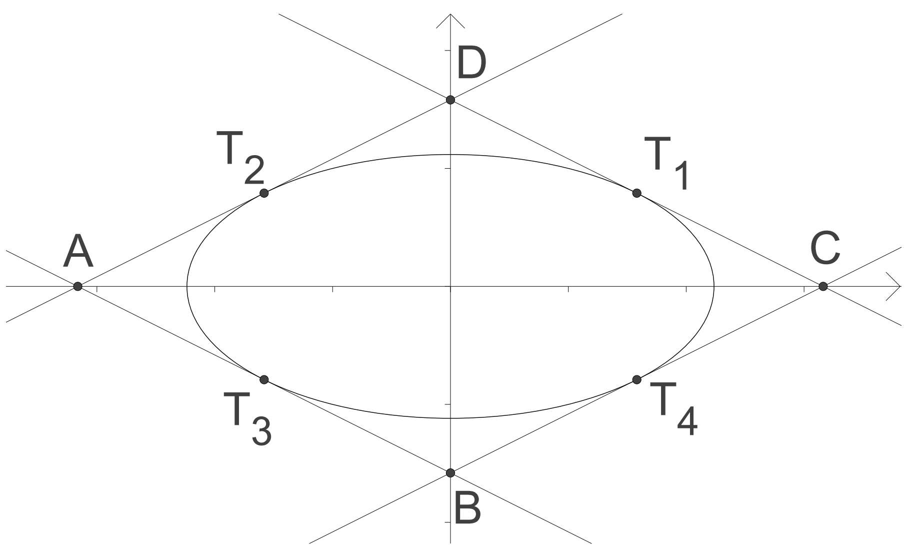
Tada je $z^n = \cos\frac{n\pi}{8} + i\sin\frac{n\pi}{8}$. (1 bod)

Realni dio izjednačimo s nulom: $\cos\frac{n\pi}{8} = 0$. (1 bod)

Dobivamo da je $\frac{n\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Najmanji prirodni broj je $n = 4$. (1 bod)

Zadatak B-4.6. Odredite jednadžbe svih tangenti elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ kojima dirališta raspolovljavaju odsječak koji na tim tangentama odsijecaju koordinatne osi. Izračunajte površinu četverokuta kojeg određuju te tangente.

Prvo rješenje. Skica (1 bod)



Označimo diralište tangente i elipse s $T(x_0, y_0)$. Jednadžba tangente je

$$x_0x + 4y_0y = 20. \qquad \text{(1 bod)}$$

Sjecišta tangente s koordinatnim osima su točke $A\left(\frac{20}{x_0}, 0\right)$ i $B\left(0, \frac{5}{y_0}\right)$. (2 boda)

Točka T je i polovište dužine AB pa vrijedi $x_0 = \frac{10}{x_0}$ i $y_0 = \frac{5}{2y_0}$ odakle slijedi

$$x_0 = \pm\sqrt{10}, \quad y_0 = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zaključujemo da postoje četiri takve tangente, a njihove jednadžbe su

$$\begin{aligned}
x-2y+2\sqrt{10}&=0\\
x+2y-2\sqrt{10}&=0\\
x-2y-2\sqrt{10}&=0\\
x+2y+2\sqrt{10}&=0.
\end{aligned}$$ (2 boda)

Ove tangente određuju romb kojemu je površina jednaka

$$P=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{20}{x_0}\right|\cdot\left|\frac{5}{y_0}\right|=40.$$ (2 boda)

Drugo rješenje. Skica (1 bod)

Jednadžba tangente je oblika $y=kx+l$. Sjecišta tangente s koordinatnim osima su $M\left(-\frac{l}{k},0\right)$, $N(0,l)$. Koordinate polovišta su $P\left(-\frac{l}{2k},\frac{l}{2}\right)$. (2 boda)

Koordinate dirališta tangente elipse su $\left(-\frac{a^2k}{l},\frac{b^2}{l}\right)$. (1 bod)

Izjednačimo li koordinate polovišta i koordinate dirališta, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{l}{2}=\frac{b^2}{l} \quad\Rightarrow\quad l^2=2b^2=2\cdot 5=10 \quad\Rightarrow\quad l=\pm\sqrt{10}\\
&-\frac{l}{2k}=-\frac{a^2k}{l} \quad\Rightarrow\quad 2k^2a^2=l^2 \quad\Rightarrow\quad k^2=\frac{l^2}{2a^2}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad k=\pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$ (2 boda)

Jednadžbe tangenti su

$$\begin{aligned}
y&=\frac{1}{2}x+\sqrt{10}\\
y&=-\frac{1}{2}x+\sqrt{10}\\
y&=\frac{1}{2}x-\sqrt{10}\\
y&=-\frac{1}{2}x-\sqrt{10}
\end{aligned}$$ (2 boda)

Površina dobivenog romba je $P=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=40$. (2 boda)

Zadatak B-4.7. Odredite sve cijele brojeve a, b i c tako da vrijedi $c=(a+bi)^3-7i$.

Rješenje. Napišimo broj c u pogodnom obliku

$$\begin{aligned}
c&=(a+bi)^3-7i\\
c&=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i-7i.
\end{aligned}$$ (1 bod)

Izjednačimo realne te imaginarne dijelove:

$$\begin{cases} c &= a^3 - 3ab^2 \\ 0 &= 3a^2b - b^3 - 7 \end{cases} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b^2) &= c \\ b(3a^2 - b^2) &= 7 \end{cases}$$

Sada imamo četiri mogućnosti:

1° $b = 1$, $3a^2 - b^2 = 7$

$3a^2 = 8$, a u skupu cijelih brojeva ova jednadžba nema rješenja (1 bod)

2° $b = -1$, $3a^2 - b^2 = -7$

$3a^2 = -6$, a u skupu cijelih brojeva ova jednadžba nema rješenja (1 bod)

3° $b = 7$, $3a^2 - b^2 = 1$

$3a^2 = 50$, a u skupu cijelih brojeva ova jednadžba nema rješenja (1 bod)

4° $b = -7$, $3a^2 - b^2 = -1$

$3a^2 = 48$, $a^2 = 16$, $a = \pm 4$. (2 boda)

$c = \pm 4(16 - 3 \cdot 49)$

$c_1 = -524$, $c_2 = 524$ (2 boda)

Rješenja su $a = 4$, $b = -7$, $c = -524$ ili $a = -4$, $b = -7$, $c = 524$. (1 bod)

Zadatak B-4.8. Ako za duljine stranica trokuta vrijedi $a - b = b - c \geq 0$, dokažite da drugi po veličini kut nije veći od $60°$. Kada će taj kut biti jednak $60°$?

Rješenje. Ako je $a - b = b - c \geq 0$, onda je $b = \frac{a+c}{2}$ i srednji po veličini je kut β.

(2 boda)

Iz poučka o kosinusu slijedi

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{\frac{4a^2+4c^2-a^2-2ac-c^2}{4}}{2ac} = \frac{3a^2 + 3c^2 - 2ac}{8ac}$$

(2 boda)

$$\cos\beta = \frac{3(a^2 - 2ac + c^2) + 4ac}{8ac} = \frac{3(a-c)^2}{8ac} + \frac{1}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Prvi pribrojnik je uvijek nenegativan pa je

$$\cos\beta \geq \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad \beta \leq 60°. \qquad \text{(2 boda)}$$

Jednakost vrijedi jedino za $a = b = c$, tj. za jednakostraničan trokut. (2 boda)